Riassunto.
Vengono esposti alcuni recenti risultati sul calcolo funzionale H^∞ per operatori settoriali e sulla R-limitatezza, con applicazioni alla regolarità massimale per equazioni differenziali lineari di tipo parabolico in spazi di Banach.

Abstract.
Some recent results are exposed on the H^∞ functional calculus for sectorial operators and on R-boundedness, with applications to maximal regularity for linear differential equations of parabolic type in Banach spaces.
The H^∞ functional calculus for an N-tuple $(T_1, \dots, T_N)$ of commuting sectorial operators is a map $f \mapsto f(T_1, \dots, T_N)$ where f is an operator valued bounded holomorphic function of N variables defined (roughly speaking) on the product of the spectra of $T_1, \dots, T_N$, $f(T_1, \dots, T_N)$ is a densely defined closed linear operator, and the map looks very like an algebra homomorphism. Though in general $f(T_1, \dots, T_N)$ need not be a bounded operator, the case where $f(T_1, \dots, T_N)$ is bounded whenever f is bounded and scalar valued has important consequences.
A family $\mathcal{T}$ of bounded linear operators on a Banach space X to a Banach space Y is said to be R-bounded if it satisfies an estimate of the type

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^N} \Big\| \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k T_k x_k \Big\|_Y \leq C \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^N} \Big\| \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k x_k \Big\|_X$$

for arbitrary $N \geq 1, T_1, \dots, T_N \in \mathcal{T}$, $x_1, \dots, x_N \in X$. This property, that is stronger than boundedness, has proved to be very useful in connection with problems of maximal regularity for abstract parabolic equations.

Negli ultimi anni il calcolo funzionale H^∞ per operatori settoriali e la R-limitatezza sono stati applicati da diversi autori allo studio della regolarità massimale per equazioni astratte di tipo parabolico.

1 Calcolo funzionale H^∞ per operatori settoriali

Conveniamo che se T è un operatore lineare che agisce in uno spazio di Banach complesso, allora $\mathcal{D}(T)$, $\mathcal{R}(T)$, $\sigma(T)$ e $\rho(T)$ denotano, rispettivamente, il dominio, il codominio, lo spettro, l'insieme risolvente di T.

$\forall \beta \in]0,\pi[$ poniamo $S_\beta = \{re^{i\theta};\ r>0,\ -\beta<\theta<\beta\}$. Se poi $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_N) \in]0,\pi[^N$, allora $S_\beta = \prod_{j=1}^{N} S_{\beta_j}$.

1.1 Definizione. *Sia T un operatore lineare nello spazio di Banach complesso X, e sia $\beta \in]0,\pi[$. Si dice che T è* settoriale *con angolo spettrale β se:*

(i) *$\mathcal{D}(T)$ e $\mathcal{R}(T)$ sono densi in X;*

(ii) *$\sigma(T) \subseteq \overline{S_\beta}$;*

(iii) *$\forall \varepsilon \in]0,\pi-\beta[\ \exists C_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che $\|\lambda(\lambda - T)^{-1}\| \le C_\varepsilon\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\beta+\varepsilon}}$.*

Dalla condizione (iii) segue che $\ker T \cap \overline{\mathcal{R}(T)} = \{0\}$; perciò dalla condizione (i) si ottiene che ogni operatore settoriale è iniettivo.

Viceversa, se X è riflessivo, allora le condizioni (ii) e (iii) della definizione 1.1 implicano che $\mathcal{D}(T)$ è denso in X, e che $X = \ker T \oplus \overline{\mathcal{R}(T)}$, cosicché T ha codominio denso se e solo se è iniettivo.

1.2 Definizione. *Sia X uno spazio di Banach complesso, $\beta \in]0,\pi[^N$. Chiamiamo*

$H(S_\beta, X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni olomorfe da S_β a X;

$H^\infty(S_\beta, X)$ lo spazio di Banach delle funzioni olomorfe e limitate da S_β a X, con la norma $\|f\|_\infty := \sup_{z\in S_\beta} \|f(z)\|_X$;

$H_0^\infty(S_\beta, X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni olomorfe $f : S_\beta \to X$ che soddisfano la seguente condizione: $\exists C>0,\ s>0$ tale che $\forall z=(z_1,\dots,z_N) \in S_\beta$

$$\|f(z)\|_X \le C \prod_{j=1}^{N} \left(\min\left\{|z_j|,\ |z_j|^{-1}\right\}\right)^s.$$

Si noti che se $X = \mathcal{L}(Y)$ (dove Y è uno spazio di Banach), allora le funzioni a valori scalari si possono identificare in modo naturale con le funzioni a valori in X sostituendo f con $f(\cdot)\,I_Y$. Inoltre in questo caso (o più in generale, se X è un'algebra di Banach) anche $H^\infty(S_\beta, X)$ è un'algebra di Banach, e $H_0^\infty(S_\beta, X)$ è un ideale bilatero di $H^\infty(S_\beta, X)$.

Siano $T_1, \dots, T_N$ operatori settoriali in uno spazio di Banach complesso X, con angoli spettrali $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. Supponiamo che i risolventi degli operatori $T_1, \dots, T_N$ commutino, e chiamiamo $\mathcal{B}$ il commutatore dei loro risolventi. Allora $\mathcal{B}$ è una sottoalgebra chiusa di $\mathcal{L}(X)$. Se $f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$, con $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ e $\alpha_j < \beta_j < \pi$ allora l'operatore $f(T_1, \dots, T_N) \in \mathcal{B}$ si definisce come segue.

Sia $\gamma_j \in]\alpha_j, \beta_j[$. Poniamo $\Gamma = \prod_{j=1}^{N} \Gamma_j$, dove Γ_j è la curva parametrizzata da $t \mapsto |t|\, e^{-i\gamma_j \operatorname{sgn} t}$ per $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e orientata in accordo con i valori crescenti di t (cioè in accordo con i valori decrescenti di $Im\, z$). Se $f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$, allora la funzione $z \mapsto f(z) \prod_{j=1}^{N} (z_j - T_j)^{-1}$ è sommabile su Γ, e il suo integrale (che appartiene a $\mathcal{B}$) non dipende dalla scelta dei valori angolari $\gamma_j \in]\alpha_j, \beta_j[$. Perciò poniamo

$$f(T_1, \dots, T_N) = (2\pi i)^{-N} \int_\Gamma f(z) \prod_{j=1}^{N} (z_j - T_j)^{-1}\, dz.$$

Si prova che l'applicazione $f \mapsto f(T_1, \dots, T_N)$ è un omomorfismo di algebre da $H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$ a $\mathcal{B}$.

Sia $\Psi_N : (\mathbb{C} \setminus \{-1\})^N \to \mathbb{C}$ la funzione definita da

$$\Psi_N(z) = \prod_{j=1}^{N} \frac{z_j}{(1 + z_j)^2}.$$

Notiamo che $\Psi_N \in H_0^\infty(S_\beta, \mathbb{C})$, e si ha

1.3 Lemma.

$$\Psi_N(T_1, \dots, T_N) = \prod_{j=1}^{N} T_j\, (1 + T_j)^{-2}.$$

Inoltre $\Psi_N(T_1, \dots, T_N)$ è iniettivo e ha codominio denso.

Allora si può estendere la definizione di $f(T_1, \dots, T_N)$ al caso di $f \in H^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$ (e in realtà, volendo, anche a uno spazio più grande) con il seguente accorgimento. Se $f \in H^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$, allora $\Psi_N f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$. Perciò possiamo porre

$$f(T_1, \dots, T_N) := \Psi_N(T_1, \dots, T_N)^{-1}\, (\Psi_N f)(T_1, \dots, T_N).$$

Questa definizione estende quella data sopra nel caso in cui $f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$, ma in generale $f(T_1, \dots, T_N)$ è un operatore chiuso, con dominio denso, ma non necessariamente limitato. Si può comunque dimostrare che:

1.4 Lemma. *Se f, $g \in H^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$, allora*

$$f(T_1, \dots, T_N) + g(T_1, \dots, T_N) \subseteq (f + g)(T_1, \dots, T_N)$$

e

$$f(T_1, \dots, T_N)\, g(T_1, \dots, T_N) \subseteq (fg)(T_1, \dots, T_N).$$

1.5 Lemma. *Se $T_0 \in \mathcal{B}$ e $f(z) = T_0\ \forall z \in S_\beta$, allora $f(T_1, \ldots, T_N) = T_0$.*

1.6 Definizione. *Sia $\mathcal{A}$ una sottoalgebra chiusa di $\mathcal{B}$. Diremo che $(T_1, \ldots, T_N)$ ha calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$ limitato se $f(T_1, \ldots, T_N) \in \mathcal{L}(X)\ \forall f \in H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$.*

Si noti che questa definizione include il caso delle funzioni scalari, che si ottiene ponendo $\mathcal{A} = \{\lambda I_X;\ \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Dal lemma 1.4 segue subito che se $(T_1, \ldots, T_N)$ ha calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$ limitato, allora $f \mapsto f(T_1, \ldots, T_N)$ è un omomorfismo di algebre da $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$ a $\mathcal{L}(X)$.

Il seguente risultato è di grande utilità, perché permette di dedurre la limitatezza del calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$ da stime su funzioni appartenenti a $H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$, per le quali esiste un'esplicita rappresentazione integrale di $f(T_1, \ldots, T_N)$.

1.7 Lemma. *Sia $\mathcal{A}$ una sottoalgebra chiusa di $\mathcal{B}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $(T_1, \ldots, T_N)$ abbia calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$ limitato è che $\exists\, C \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{A})\ \|f(T_1, \ldots, T_N)\| \le C\,\|f\|_\infty$. In questo caso è anche $\|f(T_1, \ldots, T_N)\| \le C(\beta)\,\|f\|_\infty\ \forall f \in H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$.*

In certe situazioni è utile prendere in considerazione una situazione un po' diversa. Per spiegare di che cosa si tratta, cominciamo con il dare alcune definizioni.

1.8 Definizione. $\forall \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ *poniamo* $\Sigma_\alpha = (i\,S_\alpha) \cup (-i\,S_\alpha)$.

Σ_α è quindi il "doppio settore" di semiampiezza α la cui bisettrice è l'asse immaginario. Ovviamente, se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, allora Σ_α denota $\prod_{k=1}^{N} \Sigma_{\alpha_k}$.

1.9 Definizione. *Sia T un operatore lineare nello spazio di Banach complesso X, e sia $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Si dice che T è* bisettoriale *con angolo spettrale α se:*

(i) *$\mathcal{D}(T)$ e $\mathcal{R}(T)$ sono densi in X;*

(ii) *$\sigma(T) \subseteq \overline{\Sigma_\alpha}$;*

(iii) *$\forall \varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2} - \alpha[\ \exists C_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che $\|\lambda(\lambda - T)^{-1}\| \le C_\varepsilon\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_{\alpha+\varepsilon}}$.*

Poiché $\Sigma_\alpha \subset S_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$, è ovvio che un operatore bisettoriale con angolo spettrale $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ è anche settoriale con angolo spettrale $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Tuttavia nel caso di un operatore bisettoriale si può definire $f(T)$ anche quando f è olomorfa su Σ_δ, con $\alpha < \delta < \pi$, e non necessariamente sull'intero settore $S_{\frac{\pi}{2}+\delta}$. Analogamente, se $T_1, \ldots, T_N$ sono operatori bisettoriali con risolventi che commutano, si può definire $f(T_1, \ldots, T_N)$ quando f è olomorfa su $\Sigma_\delta = \prod_{k=1}^{n} \Sigma_{\delta_k}$, se $\forall k\ \delta_k$ è maggiore dell'angolo spettrale α_k dell'operatore bisettoriale T_k.

Per fare questo conveniamo che, nella situazione attuale, $H(\Sigma_\alpha, X)$, $H^\infty(\Sigma_\alpha, X)$ e $H_0^\infty(\Sigma_\alpha, X)$ abbiano un significato analogo a quello del caso settoriale, v. la definizione 1.2. Dopo di ciò definiamo dapprima $f(T_1, \ldots, T_N)$ quando $f \in H_0^\infty(\Sigma_\delta, \mathcal{B})$. Se $\gamma_k \in$

$]\alpha_k, \delta_k[$, chiamiamo Γ_k la curva parametrizzata da $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni t \mapsto |t|\, e^{-i\gamma_k \operatorname{sgn} t}$, e poniamo $\widetilde{\Gamma}_k = \Gamma_k \cup (-\Gamma_k)$, dove Γ_k is orientata, come nel caso settoriale, in accordo con i valori decrescenti di $Im\, z$, mentre $-\Gamma_k$ è orientata in accordo con i valori crescenti di $Im\, z$. Ponendo $\widetilde{\Gamma} = \prod_{k=1}^{N} \widetilde{\Gamma}_k$, definiamo

$$f(T_1, \ldots, T_N) := (2\pi i)^{-N} \int_{\widetilde{\Gamma}} f(z) \prod_{k=1}^{N} (z_k - T_k)^{-1}\, dz.$$

È facile vedere che questo integrale è convergente (nella norma di $\mathcal{L}(X)$), non dipende dalla scelta dei $\gamma_k \in]\alpha_k, \delta_k[$, e che se $f \in H_0^\infty(S_\eta, \mathcal{B})$, con $\eta = (\delta_1 + \frac{\pi}{2}, \ldots, \delta_N + \frac{\pi}{2})$, questa definizione coincide con quella data sopra. Pertanto anche nel caso bisettoriale si può estendere la definizione di $f(T_1, \ldots, T_N)$ alle funzioni $f \in H^\infty(\Sigma_\delta, \mathcal{B})$ mediante la formula

$$f(T_1, \ldots, T_N) := \Psi_N(T_1, \ldots, T_N)^{-1} (\Psi f)(T_1, \ldots, T_N).$$

I risultati noti nel caso settoriale (e tra questi i lemmi 1.4, 1.5, 1.7 enunciati sopra) si estendono, usualmente senza difficoltà, al caso bisettoriale.

In [9] è dimostrato il

1.10 Teorema. *Se $1 < p < \infty$, allora in $L^p(\mathbb{R}^N)$ gli operatori D_{x_j} $(1 \leq j \leq N)$ sono bisettoriali, e $(D_{x_1}, \ldots, D_{x_N})$ ha calcolo funzionale $H^\infty(\Sigma_\delta, \mathbb{C})$ limitato, $\forall \delta \in]0, \pi[^N$.*

2 Alcune osservazioni e commenti

Il calcolo funzionale per operatori settoriali fa capo al lavoro [16], dove la teoria veniva sviluppata negli spazi di Hilbert. L'estensione al caso degli spazi di Banach si trova in [6]. In questi due lavori si parla di calcolo funzionale per un singolo operatore, con funzioni olomorfe a valori complessi. L'estensione al caso del calcolo funzionale congiunto per due operatori forma l'oggetto dei lavori [1, 15].

2.1 Se una N-pla ordinata di operatori settoriali $(T_1, \ldots, T_N)$, con risolventi che commutano, ammette calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$ limitato (v. la definizione 1.6 per la notazione), e se $\delta \in]0, \pi[^N$ è tale che $\delta_k > \beta_k\ \forall k$, allora $(T_1, \ldots, T_N)$ ha anche calcolo funzionale $H^\infty(S_\delta, \mathcal{A})$ limitato: infatti se $f \in H^\infty(S_\delta, \mathcal{A})$, allora $f(T_1, \ldots, T_n)$ (nel senso di $H^\infty(S_\delta, \mathcal{A})$) coincide con $g(T_1, \ldots, T_N)$ (nel senso di $H^\infty(S_\beta, \mathcal{A})$) quando $g = f|_{S_\beta}$. Perciò il calcolo funzionale limitato è tanto più "interessante", quanto più sono piccoli i settori sui quali viene definito. Questo vale anche per il caso bisettoriale, con le modifiche ovvie. ■

2.2 Indipendentemente dal fatto che $(T_1, \ldots, T_N)$ ammetta o meno calcolo funzionale H^∞ limitato su qualche prodotto cartesiano di (bi)settori, $f(T_1, \ldots, T_N)$ si può definire (senza pretenderne la limitatezza, in generale) anche per un'algebra di funzioni più grande di H^∞. Nelle condizioni della definizione 1.6 (e considerazioni analoghe valgono nel caso bisettoriale) denotiamo con $\mathcal{F}(S_\beta, \mathcal{A})$ l'algebra delle funzioni olomorfe $f : S_\beta \to \mathcal{A}$

che soddisfano la seguente condizione: esistono $C, s > 0$ tali che $\forall z \in S_\beta$ $\|f(z)\| \leq C \prod_{k=1}^{N} \left(\max\left\{|z_j|, |z_j|^{-1}\right\}\right)^s$. Si tratta, almeno nel caso $N = 1$, delle funzioni la cui norma al più diverge polinomialmente in 0 e all'infinito. Se $f \in \mathcal{F}(S_\beta, \mathcal{A})$, s è come sopra, e k è un intero maggiore di s, allora $\Psi_N^k f \in H_0^\infty$, e quindi si può definire $(\Psi_N^k f)(T_1, \ldots, T_N)$. Per di più $\Psi(T_1, \ldots, T_N)^{-k} (\Psi_N^k f)(T_1, \ldots, T_N)$ è un operatore chiuso con dominio denso e non dipende dall'intero $k > s$. Ciò permette di definire $f(T_1, \ldots, T_N)$ anche in questo caso. ∎

2.3 Si noti che per qualunque $\beta \in]0, \pi[$, tra le funzioni appartenenti a $\mathcal{F}(S_\beta, \mathbb{C})$ ci sono le potenze $z \mapsto z^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Pertanto le potenze con esponente complesso di un operatore settoriale si possono definire mediante il calcolo funzionale. Si ha inoltre che la funzione $z \mapsto z^\alpha$ è limitata su S_β se e solo se $Re\, \alpha = 0$. Perciò l'esistenza per un operatore settoriale T del calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathbb{C})$ limitato implica che T appartiene alla classe BIP(β), cioè che T ha potenze immaginarie limitate con $\|T^{is}\| \leq C\, e^{\beta|s|}$. ∎

2.4 In [8] è stato dimostrato che se in uno spazio di Banach con la proprietà UMD A e B sono operatori settoriali con risolventi che commutano e con $0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$, e se $A \in$ BIP(θ_A), $B \in$ BIP(θ_B), con $\theta_A + \theta_B < \pi$, allora $0 \in \rho(A + B)$. Se, come in [11, 17], si elimina l'ipotesi che $0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$, allora si prova che $A + B$ è, sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(A) \cap D(B)$, un operatore chiuso. Tutto ciò si applica alla regolarità massimale in $L^p(0, T; E)$ della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' + \Lambda u = f \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

quando $1 < p < \infty$, E è uno spazio di Banach UMD, e $\Lambda \in$ BIP(θ), con $\theta < \frac{\pi}{2}$. L'applicazione richiede il fatto (provato in [8]) che se E ha la proprietà UMD e $1 < p < \infty$, allora l'operatore di derivazione con dominio $\{u \in W^{1,p}(0, T; E);\ u(0) = 0\}$ appartiene alla classe BIP($\frac{\pi}{2} + \varepsilon$) $\forall \varepsilon > 0$.
In ogni modo, tornando al problema operatoriale, quello che tecnicamente occorre dimostrare è che valgono stime del tipo $\|Au\| \leq C\|Au + Bu\|$ e $\|Bu\| \leq \|Au + Bu\|$. Questo spiega l'interesse per il calcolo funzionale congiunto di una coppia di operatori settoriali che commutino: infatti se A e B sono operatori settoriali con angoli spettrali θ_A e θ_B tali che $\theta_A + \theta_B < \pi$, scegliendo ε in modo che $\theta_A + \theta_B + 2\varepsilon < \pi$, su $S_{\theta_A + \varepsilon} \times S_{\theta_B + \varepsilon}$ le funzioni $(w, z) \mapsto f(w, z) := \dfrac{w}{w + z}$ e $(w, z) \mapsto g(w, z) := \dfrac{z}{w + z}$ sono olomorfe e limitate; e dalla limitatezza di $f(A, B)$ e $g(A, B)$ si possono dedurre le stime suddette, perché $f(A, B)\,(A + B) \subseteq A$ e $g(A, B)\,(A + B) \subseteq B$. ∎

2.6 In relazione al tipo di problemi esposti qui sopra, nei lavori [1, 15] si è data la seguente definizione: si dice che uno spazio di Banach complesso X ha la proprietà del calcolo funzionale congiunto se comunque dati due operatori settoriali A e B in X i cui risolventi commutino, e che abbiano calcolo funzionale H^∞ limitato su settori S_{θ_A} e S_{θ_B}, la coppia (A, B) ha calcolo funzionale H^∞ limitato su $S_{\theta_A + \varepsilon} \times S_{\theta_B + \varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$. In [1] è provato che ogni spazio del tipo $L^q(\Omega)$ con $1 < q < \infty$ ha questa proprietà; in [15] la stessa proprietà viene dimostrata per una classe un po' più ampia di spazi di Banach,

caratterizzati da un proprietà geometrica riguardante un certo tipo di comportamento delle funzioni di Rademacher. ∎

2.7 Un altro modo di affrontare il problema della regolarità massimale per l'equazione $Au + Bu = f$, è quello di cercare di dimostrare la limitatezza dell'operatore $h(A)$, dove $h(z) = z(z+B)^{-1}$. Questo pone il problema di provare, anche in casi concreti, l'esistenza del calcolo funzionale H^∞ limitato quando la funzione olomorfa è a valori operatoriali. Quando, per esempio, $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, per dimostrare la stima $\|f(T_1, \dots, T_N)\| \leq C\,\|f\|_\infty$ per $f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$ possono essere utili teoremi di moltiplicatori. Conseguentemente ci si aspetta che il "caso vettoriale" (cioè quello in cui $f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathcal{B})$) sia molto più difficile del "caso scalare" ($f \in H_0^\infty(S_\beta, \mathbb{C})$), perché nel primo caso bisogna ricorrere a moltiplicatori a valori operatoriali, invece che moltiplicatori scalari. Utilizzando il concetto di R-limitatezza, in [14] si è provato un interessante risultato che mette in relazione l'esistenza del calcolo funzionale "scalare" con quello "operatoriale" (v. sotto). ∎

2.8 In uno spazio di Hilbert, l'esistenza del calcolo funzionale H^∞ è, per un operatore settoriale, equivalente alla limitatezza delle potenze immaginarie (v. [16]). Peraltro in [8] è provato che in uno spazio di Hilbert, per ottenere che $A + B$ sia chiuso è sufficiente chiedere che uno dei due operatori abbia potenze immaginarie limitate e che l'altro sia solo un operatore settoriale (beninteso, occorre una condizione di compatibilità analoga a $\theta_A + \theta_B < \pi$, e che in questo caso riguarderà la somma tra l'angolo spettrale di un operatore e il coefficiente esponenziale di crescita delle potenze immaginarie dell'altro, invece della somma dei due angoli spettrali). A questo punto si può formulare la seguente congettura: se in uno spazio di Banach con la proprietà UMD A e B sono operatori settoriali con i risolventi che commutano, se A ha calcolo funzionale H^∞ limitato sul settore S_{β_A}, se θ_B è l'angolo spettrale di B, e se $\beta_A + \theta_B < \pi$, allora $A + B$ è chiuso. A proposito di questa congettura c'è da dire quanto segue.

(i) Se E è uno spazio di Banach UMD e $1 < p < \infty$, allora si può dimostrare (v. [12]) che nello spazio $L^p(0, T; E)$ l'operatore $u \mapsto u'$, con dominio $\{u \in W^{1,p}(0, T; E);\ u(0) = 0\}$ ha calcolo funzionale H^∞ limitato su $S_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}$ $\forall \varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$; d'altra parte, se $-\Lambda$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico di classe C_0 in E, allora, per un opportuno $\omega \in \mathbb{R}$, l'operatore $u \mapsto (A + \omega I)u = \Lambda u + \omega u$ è settoriale con angolo spettrale $< \frac{\pi}{2}$ nello spazio $L^p(0, T; E)$. Pertanto se la congettura fosse vera, ne seguirebbe che in uno spazio di Banach UMD la soluzione del problema di Cauchy (2.5) ha regolarità massimale non appena $-\Lambda$ e il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico.

(ii) La congettura è falsa: in un recente lavoro [13] è stato dimostrato che in ogni reticolo di Banach separabile che non sia isomorfo a uno spazio di Hilbert (per esempio in $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ e $p \neq 2$) esiste un generatore infinitesimale di semigruppo analitico per il quale la soluzione del problema (2.5) non ha la proprietà di regolarità massimale.

(iii) La congettura non è poi tanto lontana dal vero; infatti diventa vera (v. [14]) se si sostituisce l'ipotesi che B sia settoriale con l'ipotesi che B sia R-settoriale; questo significa richiedere che fuori di un settore l'insieme degli operatori del tipo $B(z-B)^{-1}$ sia R-limitato in $\mathcal{L}(X)$ invece che (solamente) limitato. ∎

È quindi il caso di occuparsi della R-limitatezza.

3 R-limitatezza

La proprietà di R-limitatezza di una famiglia di operatori limitati compare, senza ricevere esplicitamente un nome, già in [3]. Più tardi è stata esplicitamente introdotta in [2]; risultati sulla R-limitatezza si possono trovare in [4, 20].

3.1 Definizione. *Siano X e Y spazi di Banach, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$. Diremo che $\mathcal{T}$ è R-limitato se $\exists\, C \geq 0$ tale che comunque assegnati un intero positivo N, $T_1, \dots, T_N \in \mathcal{T}$ e $x_1, \dots, x_N \in X$ si ha*

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^N} \Big\| \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k T_k x_k \Big\|_Y \leq C \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^N} \Big\| \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k x_k \Big\|_X .$$

Notiamo che se X è uno spazio di Banach e $f : \{-1,1\}^N \to X$ è una funzione arbitraria, allora $\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^N} f(\varepsilon) = 2^N \int_0^1 f(r_1(t), \dots, r_N(t))\, dt$, dove r_k è la k-esima funzione di Rademacher; pertanto, a causa dell'estensione (dovuta a Kahane) al caso di funzioni con valori in uno spazio di Banach della disuguaglianza di Khinchin per le funzioni di Rademacher (v. [7]), la disuguaglianza che appare nella definizione 3.1 si può riscrivere come

$$(3.2) \qquad \Big(\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^N} \Big\| \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k T_k x_k \Big\|_Y^p \Big)^{1/p} \leq C_p \Big(\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^N} \Big\| \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k x_k \Big\|_X^p \Big)^{1/p} \quad (p \geq 1).$$

La migliore costante C_p che si può porre in (3.2) (rispetto a tutte le possibili scelte di $N, T_1, \dots, T_N, x_1, \dots, x_N$) verrà denotata con $\mathcal{R}_p(\mathcal{T})$.

3.3 Osservazioni.

(a) Se in (3.2) si pone $N = 1$ si ottiene subito che $\forall T \in \mathcal{T}$ $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C_p$. Pertanto ogni insieme R-limitato $\mathcal{T}$ è anche limitato (nella norma di $\mathcal{L}(X,Y)$) e $\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \inf_{p \geq 1} C_p$.

(b) Non conosco esempi di sottoinsiemi limitati e non R-limitati di $\mathcal{L}(X,Y)$. La loro esistenza, tuttavia, si può dedurre dai punti (ii) e (iii) dell'osservazione 2.8.

(c) Se X è uno spazio di Hilbert, si può provare che

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^N} \Big\| \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k x_k \Big\|^2 = 2^N \sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^2$$

e da qui segue che se X e Y è uno spazio di Hilbert, e $\mathcal{T}$ è un sottoinsieme limitato di $\mathcal{L}(X,Y)$, allora $\mathcal{T}$ è R-limitato, e $\mathcal{R}_2(\mathcal{T}) = \sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. ∎

Gli enunciati dei seguenti tre teoremi forniscono altrettanti esempi di famiglie R-limitate di operatori.

3.4 Teorema (principio di contrazione, di KAHANE, v. [7]). *Sia X uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$, $M \in \mathbb{R}^+$. Allora $\{\lambda I_X;\ \lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| \le M\}$ è un sottoinsieme R-limitato di $\mathcal{L}(X)$, e $\forall p \in [1,\infty[$ si ha $\mathcal{R}_p\big(\{\lambda I_X;\ \lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| \le M\}\big) \le 2M$ (e, anzi, $\le M$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).*

3.5 Teorema (v. [19]). *Sia $(\psi_i)_{i\in I}$ una famiglia di funzioni appartenenti a $L^1(\mathbb{R})$; $\forall i \in I$ si supponga che la trasformata di Fourier $\mathcal{F}\psi_i$ appartenga a $W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ e che la funzione $t \mapsto t\,(\mathcal{F}\psi_i)'(t)$ appartenga a L^∞. Supponiamo inoltre che*

$$\sup_{i\in I} \max\Big\{\|\mathcal{F}\psi_i\|_{L^\infty},\ \|t\,(\mathcal{F}\psi_i)'(t)\|_{L^\infty_t}\Big\} =: \eta < \infty$$

Sia X uno spazio di Banach UMD, $1 < p < \infty$, e $\forall i \in I$ sia $T_i : L^p(\mathbb{R},X) \to L^p(\mathbb{R},X)$ l'operatore definito da $T_i f = \psi_i * f$. Allora $\{T_i;\ i \in I\}$ è un sottoinsieme R-limitato di $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R},X))$, e $\mathcal{R}_p\big(\{T_i;\ i \in I\}\big) \le C(p,X)\,\eta$ (dove $C(p,X)$ è una costante che dipende solo da p e X).

3.6 Teorema (v. [9]). *Sia $M \in \mathbb{R}^+$ e sia $\mathcal{K}$ la famiglia delle funzioni misurabili $K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ che soddisfano la condizione*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t,s\in\mathbb{R}^+} (t+s)\,|K(t,s)| \le M.$$

Sia $1 < p < \infty$, sia X uno spazio di Banach e $\forall K \in \mathcal{K}$ sia T_K l'operatore definito formalmente su $L^p(\mathbb{R}^+,X)$ da $(T_K f)(t) = \int_0^\infty K(t,s)\,f(s)\,ds$. Allora $\{T_k;\ K \in \mathcal{K}\}$ è in realtà un sottoinsieme R-limitato di $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^+,X))$, e $\mathcal{R}_p\big(\{T_k;\ K \in \mathcal{K}\}\big) \le \dfrac{2M\pi}{\sin(\pi/p)}$.

Alcune operazioni su famiglie di operatori conservano la R-limitatezza. Per esempio, se $\mathcal{T}'$ e $\mathcal{T}''$ sono famigli R-limitate di operatori, allora la loro somma

$$\mathcal{T}' + \mathcal{T}'' = \{T' + T'';\ (T',T'') \in \mathcal{T}' \times \mathcal{T}''\}$$

e la loro unione $\mathcal{T}' \cup \mathcal{T}''$ sono ancora R-limitate, e inoltre, $\forall p \in [1,\infty[$, sia $\mathcal{R}_p(\mathcal{T}' + \mathcal{T}'')$ che $\mathcal{R}_p(\mathcal{T}' \cup \mathcal{T}'')$ sono $\le \mathcal{R}_p(\mathcal{T}') + \mathcal{R}_p(\mathcal{T}'')$.

Se $\mathcal{T} \subseteq (X,Y)$ e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}(Y,Z)$ sono famiglie R-limitate di operatori, allora lo è anche $\mathcal{U} := \{ST;\ S \in \mathcal{S},\ T \in \mathcal{T}\}$ e $\mathcal{R}_p(\mathcal{U}) \le \mathcal{R}_p(\mathcal{S})\,\mathcal{R}_p(\mathcal{T})$.

Un po' più interessanti sono i seguenti risultati:

3.7 Teorema. *Se $\mathcal{T}$ è un sottoinsieme R-limitato di $\mathcal{L}(X,Y)$, allora anche $\overline{\langle\mathcal{T}\rangle}^w$ (la chiusura, nella topologia operatoriale debole, dell'involucro convesso di $\mathcal{T}$) è R-limitato e $\mathcal{R}_p\big(\overline{\langle\mathcal{T}\rangle}^w\big) = \mathcal{R}_p(\mathcal{T})$.*

3.8 Teorema. *Sia $(T_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times I}$ una famiglia di elementi di $\mathcal{L}(X,Y)$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ $(T_{n,i})_{i\in I}$ sia R-limitata e che $\forall i \in I$ la successione $(T_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente nella topologia forte di $\mathcal{L}(X,Y)$ a un operatore T_i. Sia $p \geq 1$. Supponiamo che $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_p((T_{n,i})_{i\in I}) =: M < \infty$. Allora $(T_i)_{i\in I}$ è una famiglia R-limitata e $\mathcal{R}_p((T_i)_{i\in I}) \leq M$.*

3.9 Corollario. *Sia $(T_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times I}$ una famiglia di elementi di $\mathcal{L}(X,Y)$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ $(T_{n,i})_{i\in I}$ sia R-limitata e che $\forall i \in I$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} T_{n,i}$ sia convergente nella topologia forte di $\mathcal{L}(X,Y)$ a un operatore T_i. Sia $p \geq 1$. Supponiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_p((T_{n,i})_{i\in I}) =: M < \infty$. Allora $(T_i)_{i\in I}$ è una famiglia R-limitata e $\mathcal{R}_p((T_i)_{i\in I}) \leq M$.*

È evidente che il teorema 3.7 si può utilizzare per provare la R-limitatezza di una famiglia di operatori del tipo $\int_\Omega F(t,s)\, ds$; peraltro il corollario 3.9 può venire usato per provare che se Ω è un aperto di $\mathbb{C}$, $F : \Omega \to \mathcal{L}(X,Y)$ è olomorfa e $K \subset\subset \Omega$, allora $F(K)$ è una famiglia R-limitata di operatori.

Conservano la R-limitatezza anche i seguenti due operatori "di sovrapposizione" qui sotto descritti. È inteso che X e Y sono spazi di Banach, e che $p \in [1, \infty[$.

(a) Sia (Ω, μ) uno spazio con misura. Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, allora per ogni funzione misurabile $f : \Omega \to X$ si può definire $\tilde{T}f : \Omega \to Y$ mediante la formula $\tilde{T}f = T \circ f$. È facile vedere che $\tilde{T}$ è un operatore lineare continuo da $L^p(\Omega, X)$ a $L^p(\Omega, Y)$, e che $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Per di più, se $\mathcal{T}$ è un sottoinsieme R-limitato di $\mathcal{L}(X,Y)$, e $\tilde{\mathcal{T}} := \{\tilde{T};\, T \in \mathcal{T}\}$, allora $\tilde{\mathcal{T}}$ è un sottoinsieme R-limitato di $\mathcal{L}(L^p(\mu, X), L^p(\mu, Y))$ e $\mathcal{R}_p(\tilde{\mathcal{T}}) \leq \mathcal{R}_p(\mathcal{T})$.

(b) Per $k = 1, 2$ sia (Ω_k, μ_k) uno spazio con misura σ-finita, e sia (Ω, μ) lo spazio con misura prodotto. Se $T \in \mathcal{L}(L^p(\mu_2, X), L^p(\mu_2, Y))$, si può definire l'operatore $\hat{T}$ su $L^p(\mu, X)$ mediante la formula

$$(\hat{T}f)(\omega_1, \omega_2) = \big(T(f(\omega_1, \cdot))\big)(\omega_2).$$

È facile provare che $\hat{T} \in \mathcal{L}(L^p(\mu, X), L^p(\mu, Y))$, con $\|\hat{T}\| \leq \|T\|$. Inoltre, se $\mathcal{T}$ è un sottoinsieme R-limitato di $\mathcal{L}(X,Y)$, e se $\hat{\mathcal{T}} := \{\hat{T};\, T \in \mathcal{T}\}$, allora $\hat{\mathcal{T}}$ è R-limitato e $\mathcal{R}_p(\hat{\mathcal{T}}) \leq \mathcal{R}_p(\mathcal{T})$.

4 R-limitatezza e regolarità massimale

La R-limitatezza è stata applicata con successo per ottenere teoremi di moltiplicatori operatoriali. È noto dalla metà degli anni '80 che vale una variante del teorema dei moltiplicatori di Mihlin per funzioni in $L^p(\mathbb{R}^N, X)$ (con $1 < p < \infty$) se X ha la proprietà UMD; in questo caso il moltiplicatore s'intende essere una funzione scalare. L'interesse di avere

teoremi analoghi quando il moltiplicatore prende valori operatoriali si può comprendere dal ragionamento che segue.

Se u è la soluzione *mild* del problema di Cauchy (2.5), allora almeno formalmente (ma in realtà effettivamente se f è abbastanza regolare) si ha (assumendo che Λ sia settoriale con angolo spettrale $\leq \frac{\pi}{2}$)

$$\Lambda u(t) = \int_0^t \Lambda \exp(-(t-s)\Lambda)\, f(s)\, ds$$

e quindi (continuando a procedere in modo formale, e denotando con $\mathcal{F}$ la trasformazione di Fourier)

$$\mathcal{F}\Lambda u(\tau) = \Lambda\,(i\tau + \Lambda)^{-1}\,(\mathcal{F}f)(\tau).$$

Perciò si può ottenere la regolarità massimale della soluzione se si prova che la funzione $\tau \mapsto G(\tau) := \Lambda\,(i\tau + \Lambda)^{-1}$ è un moltiplicatore in $L^p(\mathbb{R}, X)$. Si osservi, a questo proposito, che G è limitata, e così è anche $\tau \mapsto \tau\, G'(\tau) = -i\tau\Lambda(i\tau + \Lambda)^{-2}$: in altri temrini sono soddisfatte le condizioni che per una funzione *scalare* assicurano che essa è un moltiplicatore di Fourier in $L^p(\mathbb{R}, X)$ se X ha la proprietà UMD e $1 < p < \infty$. Tuttavia del caso dei moltiplicatori operatoriali non si sapeva praticamente nulla fino a pochissimo tempo fa. La R-limitatezza ha permesso di ottenere risultati in questa direzione. I seguenti due teoremi sono stati dimostrati da L. Weis in [20]; il primo di essi è stato anche generalizzato in [18] a caso delle funzioni di più variabili.

4.1 Teorema. *Siano X e Y spazi di Banach con la proprietà UMD e sia $M : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X, Y)$ una funzione derivabile. Supponiamo che $\{M(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ e $\{t\, M'(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ siano sottoinsiemi R-limitati di $\mathcal{L}(X, Y)$. Allora $\forall p \in]1, \infty[$ M è un moltiplicatore di Fourier da $L^p(\mathbb{R}, X)$ a $L^p(\mathbb{R}, Y)$.*

4.2 Teorema. *Se X è uno spazio di Banach con la proprietà UMD, $p \in]1, \infty[$, e Λ è un operatore settoriale che agisce in X e ha angolo spettrale $< \frac{\pi}{2}$, allora la soluzione del problema (2.5) ha la proprietà di regolarità massimale in L^p se e solo se l'insieme $\{\Lambda(it - \Lambda)^{-1};\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ è R-limitato.*

Il teorema 4.2 suggerisce la seguente definizione.

4.3 Definizione. *Un operatore lineare T che agisce in uno spazio di Banach complesso X si dice essere R-settoriale con angolo R-spettrale $\beta \in]0, \pi[$ se:*

(i) *$\mathcal{D}(A)$ e $\mathcal{R}(A)$ sono densi in X*

(ii) *$\sigma(A) \subseteq \overline{S_\beta}$*

(iii) *$\forall \varepsilon \in]0, \pi - \beta[$ l'insieme $\{T(z - T)^{-1};\ z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\beta+\varepsilon}}\}$ è R-limitato.*

È ovvio che ogni operatore R-settoriale è settoriale; d'altra parte si ha

4.4 Teorema (v. [5]). *Ogni operatore settoriale con potenze immaginarie limitate è R-settoriale.*

Diamo ora l'enunciato di alcuni risultati provati da N.J. Kalton e L. Weis in [14], ai quali si è fatto allusione nelle osservazioni 2.7 e 2.8.

4.5 Teorema. *Sia X uno spazio di Banach complesso con la proprietà UMD. Siano A e B operatori che agiscono in X e i cui risolventi commutano. Si supponga che A sia settoriale abbia calcolo funzionale $H^\infty(S_{\beta_A}, \mathbb{C})$ limitato, e che B sia R-settoriale con angolo R-spettrale θ_B. Se $\beta_A + \theta_B < \pi$, allora $A + B$ è chiuso.*

4.6 Corollario. *Sia X uno spazio di Banach complesso con la proprietà UMD e $p \in]1, \infty[$. Se Λ è un operatore R-settoriale in X, con angolo R-spettrale $< \frac{\pi}{2}$, allora la soluzione del problema 2.5 ha la proprietà di regolarità massimale in L^p.*

4.7 Teorema. *Sia T è un operatore settoriale nello spazio di Banach X, e sia $\mathcal{A}$ una sottoalgebra chiusa del commutatore dei risolventi di T in $\mathcal{L}(X)$. Si supponga che T abbia calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathbb{C})$ limitato, e sia $f : \Sigma_\beta \to \mathcal{A}$ una funzione olomorfa il cui codominio sia R-limitato. Allora $f(T) \in \mathcal{L}(X)$.*

Il teorema 4.7 si può generalizzare come segue (la dimostrazione si può trovare in [10], dove si vede che vale anche l'analogo risultato nel caso bisettoriale).

4.8 Teorema. *Sia X uno spazio di Banach complesso e siano $T_1, \ldots, T_N$ operatori settoriali che agiscono in X e i cui risolventi commutano. Sia $\mathcal{A}$ una sottoalgebra chiusa del commutatore dei risolventi di $T_1, \ldots, T_N$. Si supponga che $(T_1, \ldots, T_N)$ abbia calcolo funzionale $H^\infty(S_\beta, \mathbb{C})$ limitato (con $\beta \in]0, \pi[^N$) e sia $f : S_\beta \to \mathcal{A}$ una funzione olomorfa il cui codominio sia R-limitato. Allora $f(T_1, \ldots, T_N) \in \mathcal{L}(X)$. Inoltre esiste una costante C (indipendente da f) tale che $\|f(T_1, \ldots, T_N)\| \leq C \mathcal{R}_2(f(S_\beta))$.*

Il caso bisettoriale del teorema 4.8 è stato utilizato in [9] per dimostrare la limitatezza del calcolo funzionale H^∞ per la realizzazione in L^p ($1 < p < \infty$), rispetto a condizioni al contorno generali, di un operatore ellittico di ordine arbitrario su un semispazio; l'operatore ha coefficienti costanti ed è di tipo principale.

Bibliografia

[1] D. Albrecht, E. Franks, A. McIntosh: Holomorphic functional calculi and sums of commuting operators; Bull. Aust. Math. Soc. **58** (1998), 291-305.

[2] E. Berkson, T.A. Gillespie: Spectral decompositions and harmonic analysis on UMD spaces; Studia Math. **112** (1994), 13-49.

[3] J. Bourgain: Some remarks on Banach spaces in which martingale differences are unconditional; Ark. Mat. **21** (1983), 163-168.

[4] P. Clément, B. de Pagter, F.A. Sukochev, H. Witvliet: Schauder decompositions and multiplier theorems; Studia Math. **138** (2000), 135-163.

[5] P. Clément, J. Prüss: An operator-valued transference principle and maximal regularity on vector-valued L_p-spaces; in "Evolution Equations and their Applications in Physical and Life Sciences" (G. Lumer, L. Weis, eds.), Marcel Dekker, New York - Basel, 2001, pp. 67-87.

[6] M. Cowling, I. Doust, A. McIntosh, A. Yagi: Banach space operators with a bounded H^∞ functional calculus; J. Austral. Math. Soc. Ser A **60** (1996), 51-89.

[7] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge: *Absolutely Summing Operators*; Cambridge Univeristy Press, 1995.

[8] G. Dore, A. Venni: On the closedness of the sum of two closed operators; Math. Z. **196** (1987), 189-201.

[9] G. Dore, A. Venni: H^∞ functional calculus for an elliptic operator on a half-space with general boundary conditions; preprint.

[10] G. Dore, A. Venni: H^∞ functional calculus for bisectorial operators; preprint.

[11] Y. Giga, H. Sohr: Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains; J. Funct. Anal. **102** (1991), 72-94.

[12] M. Hieber, J. Prüss: Functional calculi for linear operators in vector-valued L^p-spaces via the transference principle; Adv. Differential Equations **3** (1998), 847-872.

[13] N.J. Kalton, G. Lancien: A solution to the problem of L^p-maximal regularity; Math. Z. **235** (2000), 559-568.

[14] N.J. Kalton, L. Weis: The H^∞-calculus and sums of closed operators; preprint.

[15] F. Lancien, G. Lancien, C. Le Merdy: A joint functional calculus for sectorial operators with commuting resolvents; Proc. London Math. Soc. (3) **7** (1998), 387-414.

[16] A McIntosh: Operators which have an H^∞ functional calculus; Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. **14** (1986), 210-231.

[17] J. Prüss, H. Sohr: On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces; Math. Z. **203** (1990), 429-452.

[18] Ž. Štrkalj, L. Weis: On operator-valued Fourier multiplier theorems; preprint.

[19] A. Venni: Mihlin multiplier theorem and R-boundedness; preprint.

[20] L. Weis: Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L^p-regularity; preprint.